## § 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Такая структура, как **граф** (в качестве синонима используется также термин «сеть») , имеет самые различные применения в информатике и в смежных прикладных областях, поэтому познакомимся с основными понятиями теории графов.

Граф *G = (V, Е)* задается парой конечных множеств *V* и *Е.* Элементы первого множества *V1, v2,..., vM* называются **вершинами** графа (при графическом представлении им соответствуют точки). Элементы второго множества *е1, е2, ...,eN* называют **ребрами.** Каждое ребро определяется парой вершин (при графическом представлении ребро соединяет две вершины графа). Если ребра графа определяются упорядоченными парами вершин, то такой граф называют **ориентированным** (на чертеже при изображении ориентированного графа на каждом ребре ставят стрелку, указывающую его направление). Ориентированный граф с пятью вершинами и семью ребрами изображен на рис. 1.6.



*Рис. 1.6.* Пример ориентированного графа

Если две вершины соединены двумя или более ребрами, то эти ребра называют параллельными (например, ребра е4 и *е5).* Если начало и конец ребра совпадают, то такое ребро называется **петлей** (например, ребро *е7).* Граф без петель и параллельных ребер называется простым.

Если ребро *ek* определяется вершинами *vi* и *vj* (будем обозначать этот факт следующим образом: *ek* = *(vi, vj),* то говорят, что ребро *ek* **инцидентно** вершинам *vi* и *vj.* Две вершины *vi* и *vj* называются смежными, если в графе существует ребро *(vi, vj).*

Последовательность вершин *vi1, vi2,..., vik,* таких, что каждая пара *(vi,(j-1), vij)* при 1 *< j ≤ k* определяет ребро, называется **маршрутом** в графе *G.* Вершины *vil* и *vik* называют **концевыми** вершинами маршрута, все остальные входящие в него вершины - **внутренними.**

Маршрут, в котором все определяемые им ребра различны, называют цепью. Цепь считают замкнутой, если ее концевые вершины совпадают. Замкнутая цепь, в которой все вершины (за исключением концевых) различны, называется циклом. Незамкнутая цепь, в которой все вершины различны, носит название путь. Если в ориентированном графе существует путь из *vi* в *vj,* то говорят, что вершина *vj* достижима из вершины *vi.*

Две вершины *vi* и *vj* называют связанными в графе *G,* если в нем существует путь, для которого эти вершины являются концевыми. Граф *G* называется связным, если каждые две вершины в нем являются связанными. На рис. 1.7 изображен простой неориентированный связный граф.

Последовательность вершин *v1, v5,* i4, *v3 ,* например, определяет путь, а последовательность вершин *v1, v5,* i4, *v3, vl, v1 -* цикл. **Деревом** будем называть неориентированный связный граф без циклов. **Лес** - это любой граф без циклов. На рис. 1.8 показаны возможные деревья с пятью вершинами.



*Рис. 1.7.* Пример неориентированного связного графа



*Рис. 1.8.* Примеры деревьев

Анализ приведенных здесь понятий и определений показывает, что в качестве моделей графы удобно использовать в тех случаях, когда рассматривается система каких-либо объектов, между которыми существуют определенные связи, отношения, когда изучается структура системы, возможности ее функционирования. В информатике графы используются в разделах: операционные системы, алгоритмизация, структуры данных, информационное моделирование и др.

### 5.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ

Важным вопросом, особенно для приложений теории графов, является определение возможных способов представления графов. Самый простой способ - полное перечисление множеств *V* и *Е.* Однако, очевидно, что в этом случае выявление у графа различных характеристик и свойств будет крайне затруднительным. Граф можно представить в виде некоторого графического изображения и визуально определить некоторые свойства и характеристики заданного графа. Однако, при наличии в графе'большого числа ребер и вершин этот способ также мало пригоден. Рассматривая различные возможные способы представления графов, мы должны иметь в виду потребность ввода соответствующей информации в компьютер. В этой связи ввод информации в числовом виде предпочтителен, хотя современные технические средства допускают ввод и графической информации (таблиц, текста, графиков, рисунков и т.д.), после чего может производиться обработка такой информации.

**Матрица смежности.** Если вершины графа G помечены метками *v1, v2,..., vn,* то элементы матрицы смежности *A(G)* размера *V, xV* определяются следующим образом: *A(i.j) =* 1, если *vi* смежна с *vj; A(ij)* = 0 в противном случае (рис. 1.9, *а).*

**Матрица инцидентности.** Если вершины графа *G* помечены метками *v1, v2,..., vm,* а ребра - метками *е1, е2,..., еп,* то элементы **матрицы инцидентности** *I(G)* размера *М* х *N* определяются правилом: *B(ij) =* 1, если *vi* инцидентна *ej; B(iJ)* = 0 в противном случае (см. рис. 1.9, *б).*



*Рис. 1.9, а.* Матрица смежности *Рис. 1.9, б.* Матрица инцидентности

Для ориентированного графа *G,* имеющего *N* вершин можно рассмотреть матрицу **достижимости** *C(G)* размера *N* х *N,* элементы которой определяются так: С(*I*, *J)* = 1, если вершина *vj* достижима из *vi; C(I, J)* = 0 в противном случае. Ниже приведен пример ориентированного графа и его матрицы достижимости, рис. 1.10.



*Рис. 1.10.* Матрица достижимости ориентированного графа