## § 3. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

### 3.1. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

**Система счисления** - принятый способ записи чисел и сопоставления этим записям реальных значений. Все системы счисления можно разделить на два класса: **позиционные и непозиционные.** Для записи чисел в различных системах счисления используется некоторое количество отличных друг от друга знаков. Число таких знаков в позиционной системе счисления называется **основанием системы счисления.** Ниже приведена табл. 1.4, содержащая наименования некоторых позиционных систем счисления и перечень знаков (цифр), из которых образуются в них числа.

**Таблица 1.4. Некоторые системы счисления**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Основание | Система счисления | Знаки |
| 2 | Двоичная | 0,1 |
| 3 | Троичная | 0,1.2 |
| 4 | Четвертичная | 0,1,2,3 |
| 5 | Пятиричная | 0,1,2,3,4 |
| 8 | Восьмиричная | 0,1,2,3,4,5,6,7 |
| 10 | Десятичная | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 |
| 12 | Двенадцатиричная | 0,1,2,3,4,5,б,7,8,9,А,В |
| 16 | Шестнадцатиричная | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A.B,D,E,F |

В позиционной системе счисления число может быть представлено в виде суммы произведений коэффициентов на степени основания системы счисления:

AnAn-1An-2 … A1,A0,A-1,A-2 =

АnВn + An-1Bn-1 + ... + A1B1 + А0В0 + A-1B-1 + А-2В-2 + ...

(знак «точка» отделяет целую часть числа от дробной; знак «звездочка» здесь и ниже используется для обозначения операции умножения). Таким образом, значение каждого знака в числе зависит от позиции, которую занимает знак в записи числа. Именно поэтому такие системы счисления называют позиционными. Примеры (десятичный индекс внизу указывает основание системы счисления):

23,43(10) = 2\*101 + З\*10° + 4\*10-1 + З\*10-2

(в данном примере знак «З» в одном случае означает число единиц, а в другом - число сотых долей единицы);

692(10) = 6\* 102 + 9\*101 + 2.

(«Шестьсот девяносто два» с формальной точки зрения представляется в виде «шесть умножить на десять в степени два, плюс девять умножить на десять в степени один, плюс два»).

1101(2)= 1\*23 + 1\*22+0\*21+ 1\*2°;

112(3) *=* l\*32+ 1\*31 +2\*3°;

341,5(8) =3\*82+ 4\*81 +1\*8° +5\*8-1;

A1F4(16) = A\*162 + 1\*161 + F\*16° + 4\*16-1.

При работе с компьютерами приходится параллельно использовать несколько позиционных систем счисления (чаще всего двоичную, десятичную и шестнадцатиричную), поэтому большое практическое значение имеют процедуры перевода чисел из одной системы счисления в другую.Заметим**,** что во всех приведенных выше примерах результат является десятичным числом, и, таким образом, способ перевода чисел из любой позиционной системы счисления в десятичную уже продемонстрирован.

Чтобы перевести целую часть числа из десятичной системы в систему с основанием *В,* необходимо разделить ее на *В.* Остаток даст младший разряд числа. Полученное при этом частное необходимо вновь разделить на *В -* остаток даст следующий разряд числа и т.д. Для перевода дробной части ее необходимо умножить на *В.* Целая часть полученного произведения будет первым (после запятой, отделяющей целую часть от дробной) знаком. Дробную же часть произведения необходимо вновь умножить на *В.* Целая часть полученного числа будет следующим знаком и т.д.

Отметим, что кроме рассмотренных выше позиционных систем счисления существуют такие, в которых значение знака не зависит от того места, которое он занимает в числе. Такие системы счисления называются непозиционными. Наиболее известным примером непозиционной системы является римская. В этой системе используется 7 знаков (I, V, X, L, С, D, М), которые соответствуют следующим величинам:

1(1) V(5) X(10) L(50) С (100) D(500) M(1000)

*Примеры:* III (три), LIX (пятьдесят девять), DLV (пятьсот пятьдесят пять).

Недостатком непозиционных систем, из-за которых они представляют лишь исторический интерес, является отсутствие формальных правил записи чисел и, соответственно, арифметических действий над ними (хотя по традиции римскими числами часто пользуются при нумерации глав в книгах, веков в истории и др.).

### 3.2. ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Особая значимость двоичной системы счисления в информатике определяется тем, что внутреннее представление любой информации в компьютере является двоичным, т.е. описываемым наборами только из двух знаков (0 и 1).

Конкретизируем описанный выше способ в случае перевода чисел из десятичной системы в двоичную. Целая и дробная части переводятся порознь. Для перевода целой части (или просто целого) числа необходимо разделить ее на основание системы счисления и продолжать делить частные от деления до тех пор, пока частное не станет равным 0. Значения получившихся остатков, взятые в обратной последовательности, образуют искомое двоичное число. Например:

 Остаток

25 : 2 = 12 (1),

12 : 2 = 6 (0),

6 : 2 = 3 (0),

3 : 2 = 1 (1),

1 : 2 = 0 (1).

Таким образом

25(10)=11001(2).

Для перевода дробной части (или числа, у которого «0» целых) надо умножить ее на 2. Целая часть произведения будет первой цифрой числа в двоичной системе. Затем, отбрасывая у результата целую часть, вновь умножаем на 2 и т.д. Заметим, что конечная десятичная дробь при этом вполне может стать бесконечной {периодической) двоичной. Например:

0,73 • 2 = 1,46 (целая часть 1),

0,46 • 2 = 0,92 (целая часть 0 ),

0,92 • 2 = 1,84 (целая часть 1),

0,84 • 2 = 1,68 (целая часть 1) и т.д.

В итоге

0,73(10) =0,1011...(2).

Над числами, записанными в любой системе счисления, можно; производить различные арифметические операции. Так, для сложения и умножения двоичных чисел необходимо использовать табл. 1.5.

**Таблица 1.5. Таблицы сложения и умножения в двоичной системе**



Заметим, что при двоичном сложении 1 + 1 возникает перенос единицы в старший разряд - точь-в-точь как в десятичной арифметике:



### 3.3. ВОСЬМЕРИЧНАЯ И ШЕСТНАДЦАТИРИЧНАЯ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

С точки зрения изучения принципов представления и обработки информации в компьютере, обсуждаемые в этом пункте системы представляют большой интерес.

Хотя компьютер «знает» только двоичную систему счисления, часто с целью уменьшения количества записываемых на бумаге или вводимых с клавиатуры компьютера знаков бывает удобнее пользоваться восьмеричными или шестнадцатиричными числами, тем более что, как будет показано далее, процедура взаимного перевода чисел из каждой из этих систем в двоичную очень проста - гораздо проще переводов между любой из этих трех систем и десятичной.

Перевод чисел из десятичной системы счисления в восьмеричную производится (по аналогии с двоичной системой счисления) с помощью делений и умножений на 8. Например, переведем число 58,32(10):

58 : 8 = 7 (2 в остатке),

7 : 8 = 0 (7 в остатке).

0,32 • 8 = 2,56,

0,56 • 8 = 4,48,

0,48-8=3,84,...

Таким образом,

58,32(10) =72,243... (8)

(из конечной дроби в одной системе может получиться бесконечная дробь в другой).

Перевод чисел из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную производится аналогично.

С практической точки зрения представляет интерес процедура взаимного преобразования двоичных, восьмеричных и шестнадцатиричных чисел. Для этого воспользуемся табл. 1.6 чисел от 0 до 15 (в десятичной системе счисления), представленных в других системах счисления.

Для перевода целого двоичного числа в восьмеричное необходимо разбить его справа налево на группы по 3 цифры (самая левая группа может содержать менее трех двоичных цифр), а затем каждой группе поставить в соответствие ее восьмеричный эквивалент. Например:

11011001= 11011001, т.е. 11011001(2) =331(8).

Заметим, что группу из трех двоичных цифр часто называют «двоичной триадой».

Перевод целого двоичного числа в шестнадцатиричное производится путем разбиения данного числа на группы по 4 цифры - «двоичные тетрады»:

1100011011001 = 1 1000 1101 1001, т.е. 1100011011001(2)= 18D9(16).

Для перевода дробных частей двоичных чисел в восьмеричную или шестнадцатиричную системы аналогичное разбиение на триады или тетрады производится от точки вправо (с дополнением недостающих последних цифр нулями):

0,1100011101(2) =0,110 001 110 100 = 0,6164(8),

0,1100011101(2) = 0,1100 0111 0100 = 0,C74(16).

Перевод восьмеричных (шестнадцатиричных) чисел в двоичные производится обратным путем - сопоставлением каждому знаку числа соответствующей тройки (четверки) двоичных цифр.

Таблица 1.6 Соответствие чисел в различных системах счисления

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Десятичная | Шестнадцатиричная | Восьмеричная | Двоичная |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 10 |
| 3 | 3 | 3 | 11 |
| 4 | 4 | 4 | 100 |
| 5 | 5 | 5 | 101 |
| 6 | 6 | 6 | 110 |
| 7 | 7 | 7 | 111 |
| 8 | 8 | 10 | 1000 |
| 9 | 9 | 11 | 1001 |
| 10 | А | 12 | 1010 |
| 11 | В | 13 | L011 |
| 12 | С | 14 | 1100 |
| 13 | D | 15 | 1101 |
| 14 | E | 16 | 1110 |
| 15 | F | 17 | 1111 |

Преобразования чисел из двоичной в восьмеричную и шестнадцатиричную системы и наоборот столь просты (по сравнению с операциями между этими тремя системами и привычной нам десятичной) потому, что числа 8 и 16 являются целыми степенями числа 2. Этой простотой и объясняется популярность восьмеричной и шестнадцатиричной систем в вычислительной технике и программировании.

Арифметические действия с числами в восьмеричной и шестнадцатиричной системах счисления выполняются по аналогии с двоичной и десятичной системами. Для этого необходимо воспользоваться соответствующими таблицами. Для примера табл. 1.7 иллюстрирует сложение и умножение восьмеричных чисел.

Рассмотрим еще один возможный способ перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую - *метод вычитания степеней.* В этом случае из числа последовательно вычитается максимально допустимая степень требуемого основания, умноженная на максимально возможный коэффициент, меньший основания; этот коэффициент и является значащей цифрой числа в новой системе. Например, число 114(10):

114 - 26 = 114 – 64 = 50,

50 *-* 25 *=* 50 – 32 = 18,

18 - 24 = 2,

2 - 21 = 0.

Таким образом, 114(10) = 1110010(2).

114 – 1 ∙ 82 = 114 – 64 = 50,

50 – 6 ∙ 81 = 50 – 48 = 2,

2 – 2 ∙ 8° = 2 – 2 = 0.

Итак, 114(10)= 162(8).

**Таблица 1.7 Таблицы сложения и умножения в восьмеричной системе**

Сложение Умножение

