Лабораторная работа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСОВ ОРБИТ И ПЕРИОДОВ ОБРАЩЕНИЯ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Цель работы:

- получить положения спутников в разные моменты времени;
- определить радиусы орбит спутников и периоды их обращения;
- проверить третий закон Кеплера по полученным данным.

ВВЕДЕНИЕ

В работе используются снимки системы Юпитера, полученные на оптико-электронном роботизированном астрофизическом комплексе. Снимки сохранены в формате JPEG. Для обработки используются снимки, исправленные с помощью «темнового кадра» (получается с закрытым затвором камеры в ту же ночь с той же экспозицией, что и объект), «байеса» (bias, шум считывания, получается с нулевой экспозицией), и «плоского поля» (получается при съемке равномерно освещенных поверхностей, позволяет учесть неоднородность чувствительности отдельных элементов ПЗС-матрицы).

Работа выполняется на ПК, работающем под управлением Windows с инсталлированным офисным пакетом (рекомендуется MS Office), а также графическим редактором (рекомендуется Paint.Net).

Законы Кеплера

Заслуга открытия законов движения планет принадлежит Иоганну Кеплеру. В начале XVII в. Кеплер установил три закона движения планет. Они названы законами Кеплера, это три эмпирических соотношения, интуитивно подобранных Иоганном Кеплером на основе анализа астрономических наблюдений Тихо Браге. Они описывают идеализированную орбиту планеты.

Первый закон Кеплера: каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Эллипсом называется плоская замкнутая кривая, имеющая такое свойство, что сумма расстояний каждой ее точки от двух точек, называемых фокусами, остается постоянной. Степень вытянутости эллипса характеризуется величиной его эксцентриситета. Эксцентриситет равен отношению расстояния фокуса от центра к длине большой полуоси. В пределе при совпадении фокусов и центра эксцентриситет равен нулю, и эллипс превращается в окружность.

Эксцентриситеты орбит у комет приближаются к единице. При эксцентриситете равном 1 второй фокус эллипса удаляется (в пределе) в бесконечность, так что эллипс становится разомкнутой кривой, называемой параболой. Ее ветви в бесконечности стремятся стать параллельными.

Кеплер открыл свои законы, изучая периодическое обращение планет вокруг Солнца. Ньютон, исходя из законов Кеплера, открыл закон всемирного тяготения. При этом он нашел, что под действием взаимного тяготения тела могут двигаться друг относительно друга по эллипсу, в частности по кругу, по параболе и по гиперболе.

Так как законы Кеплера являются следствием закона всемирного тяготения, то они применимы к любым системам тел, движущимся под действием гравитационной силы, в том числе и для спутников планет.

Второй закон Кеплера (закон площадей): радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади. Радиусом-вектором планеты называется отрезок прямой, соединяющий планету с Солнцем. Скорость планеты при движении ее по орбите тем больше, чем ближе она к Солнцу. Применительно к Солнечной системе, с этим законом связаны два понятия: перигелий — ближайшая к Солнцу точка орбиты, и афелий — наиболее удалённая точка орбиты. Таким образом, из второго закона Кеплера следует, что планета движется вокруг Солнца неравномерно, имея в перигелии большую линейную скорость, чем в афелии.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Справедливо не только для планет, но и для их спутников. Третий закон Кеплера связывает средние расстояния планет от Солнца с периодами обращения и позволяет большие полуоси всех планетных орбит выразить в единицах большой полуоси земной орбиты. Большую полуось земной орбиты называют астрономической единицей расстояний. В астрономических единицах средние расстояния планет от Солнца были определены раньше, чем узнали длину астрономической единицы в километрах. Формула III закона Кеплера для круговых орбит, когда большая и малая полуоси равны и образуют радиус окружности

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}. \qquad (1)$$

Определение радиуса орбиты и периода обращения тела, движущегося по круговой орбите

Орбиты галилеевых спутников Юпитера имеют малые эксцентриситеты (Ио — 0,0001, Европа — 0,00009, Ганимед — 0,00147, Каллисто — 0,00733), поэтому в работе будет использовано приближение круговых орбит. Плоскости их орбит почти совпадают с плоскостью эклиптики (наклон орбиты Ио — 2′, Европа — 27′, Ганимед — 11′, Каллисто — 15′), их видимый наклон испытывает небольшие колебания, система спутников Юпитера видна с «ребра», колебаниями наклонов орбит в работе пренебрегается. В работе также не учитывается, что движение в системе Юпитера происходит вокруг общего центра масс.

Исходными данными для определения радиусов орбит и периодов обращения спутников планет являются видимые угловые расстояния спутников от центра Юпитера. Измеряя угловой радиус Юпитера (на каждом снимке), можно выразить проекции радиусов-векторов спутников на плоскость поля зрения в радиусах Юпитера, а затем перевести в километры.

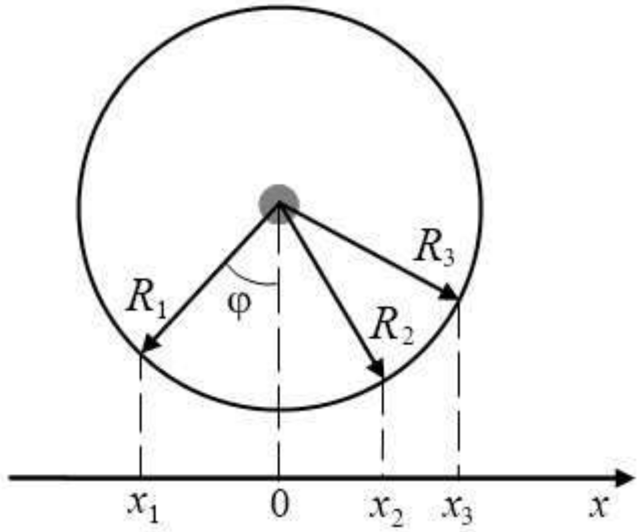

Рисунок 1 — К определению радиуса орбиты

На плоскости поля зрения введем ось координат Ox, нуль которой совмещен с центром планеты. В этом случае проекции радиуса-вектора **R** в разные моменты времени t_1, t_2 и t_3 будут иметь значения x_1, x_2 и x_3, а также удовлетворять уравнениям (2).

$$\begin{cases} x_1 = R\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_1 + \varphi\right) \\ x_2 = R\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_2 + \varphi\right) \\ x_3 = R\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_3 + \varphi\right) \end{cases} \tag{2}$$

Здесь x_1, x_2 и x_3 — удаления спутника от центра планеты, найденные путем анализа астрометрических данных в разные моменты времени t_1, t_2 и t_3. Значение времени t_1 целесообразно принять равным нулю, тогда t_2 и t_3 равны промежуткам времени, прошедшими между моментами получения первого и второго, первого и третьего снимков соответственно, а $\varphi \neq 0$ есть угол между радиусом-вектором и лучом зрения на первом снимке. Искомыми величинами являются модуль радиуса-вектора R, период обращения T и угол φ.

Раскрывая синус суммы, имеем

$$\begin{cases} x_1 = R\left(\sin\dfrac{2\pi t_1}{T}\cos\varphi + \sin\varphi\cos\dfrac{2\pi t_1}{T}\right) \\ x_2 = R\left(\sin\dfrac{2\pi t_2}{T}\cos\varphi + \sin\varphi\cos\dfrac{2\pi t_2}{T}\right) \\ x_3 = R\left(\sin\dfrac{2\pi t_3}{T}\cos\varphi + \sin\varphi\cos\dfrac{2\pi t_3}{T}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Путем деления первого уравнения на втрое и второго на третье исключаем *R*, затем обе части уравнений делим на cos *φ*. Учтем также, что $t_1 = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2}\left(\sin\dfrac{2\pi t_2}{T} + tg\varphi\cos\dfrac{2\pi t_2}{T}\right) = tg\varphi \\ \dfrac{x_2}{x_3}\left(\sin\dfrac{2\pi t_3}{T} + tg\varphi\cos\dfrac{2\pi t_3}{T}\right) = \sin\dfrac{2\pi t_2}{T} + tg\varphi\cos\dfrac{2\pi t_2}{T} \end{cases} \tag{4}$$

Для упрощения вида уравнений введем следующие замены. Постоянные величины, полученные из наблюдений $A = \dfrac{x_1}{x_2}$, $B = \dfrac{x_2}{x_3}$, $C = 2\pi t_3$, $D = 2\pi t_2$, а также неизвестная величина $f = tg\,\varphi$.

$$\begin{cases} A\left(\sin\dfrac{D}{T} + f\cos\dfrac{D}{T}\right) = f \\ B\left(\sin\dfrac{C}{T} + f\cos\dfrac{C}{T}\right) = \sin\dfrac{D}{T} + f\cos\dfrac{D}{T} \end{cases} \tag{5}$$

Выразим из первого уравнения $f = \dfrac{A\sin\dfrac{D}{T}}{1 - A\cos\dfrac{D}{T}}$.

После подстановки *f* во второе уравнение имеем равенство двух функций от T $F_1(T) = F_2(T)$ (левая и правая части второго уравнения системы (5). Решим полученное уравнение графически. Целесообразно применить электронные таблицы. Рекомендуется следующий вид электронной таблицы.

Таблица А.1 – Рекомендованный вид электронной таблицы для численного решения уравнения (4)

	A	**B**	**C**	**D**
1	A =	*значение A*		
2	B =	*значение B*		
3	C =	*значение C*		
4	D =	*значение D*		
5	T	f	F_1(T)	F_2(T)
6	30	=$B$1*SIN($B$4/A6)	=$B$2*(SIN($B$3/A6)+B6*COS($B$3/A6))	=SIN($B$4/A6)+B6*COS($B$4/A6)
7	31			
	…			
396	420			

Далее следует построить точечные диаграммы зависимостей $F_1(T)$ и $F_2(T)$ от T и найти точку пересечения линий $F_1(T)$ и $F_2(T)$. Путем изменения значений T можно добиться достаточной точности в определении T, за одно из таблицы можно получить значение f. Далее вычисляя φ и подставляя значение в первое уравнение системы (1) получим радиус орбиты R.

Получение проекции радиуса-вектора спутника по снимку с использованием графического редактора

Можно предложить следующую методику определения проекции радиуса-вектора с использованием графического редактора, например, Paint.Net, без предварительного определения экваториальных координат. Для этого следует получить координаты пикселей x_c и y_c в центре изображения спутника и пикселей x_0 и y_0 в центре изображения планеты, подводя курсор мышью в нужную точку. Координаты пикселя будут показаны в строке состояния снизу рабочей области окна приложения. Далее следует найти длину r отрезка, соединяющего эти пиксели, который пропорционален проекции радиуса-вектора спутника на плоскость поля зрения

$$r = \sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2} \,. \qquad (6)$$

Таким же способом следует определить экваториальный диаметр d изображения планеты в единицах длины самого снимка. Зная, что экваториальный диаметр Юпитера равен 71398 км, получаем проекцию радиуса-вектора спутника на плоскость поля зрения в километрах.

Для организации вычислений целесообразно применить электронные таблицы.

Таблица А.2 – Рекомендованный вид электронной таблицы для вычисления проекции расстояния спутника от планеты

координаты точек	1-й спутник	2-й спутник
x центра спутника в единицах снимка		
y центра спутника в единицах снимка		
x центра планеты в единицах снимка		
y центра планеты в единицах снимка		
r расстояние спутника от планеты в единицах снимка	=КОРЕНЬ((B2-B4)^2+(B3-B5)^2)	
x восточного края экватора планеты в единицах снимка		
y восточного края экватора планеты в единицах снимка		
x западного края экватора планеты в единицах снимка		
y западного края экватора планеты в единицах снимка		
d диаметр планеты в единицах снимка	=КОРЕНЬ((B7-B9)^2+(B8-B10)^2)	
r расстояние спутника от планеты в диаметрах планеты	=B6/B11	
D диаметр планеты в км	71398	
r проекция расстояния спутника от планеты в км	=B12*B13	

Мы видим, что нет необходимости знать расстояние до системы в момент съёмки. К недостаткам данной методики можно отнести необходимость самостоятельного неавтоматизированного поиска центров изображений спутника и планеты, что вносит долю субъективности в измерения и является источником погрешности.

Далее следует также обработать два других снимка и записать полученные значения проекций расстояний спутников вместе с моментами времени, когда снимки получены, для выполнения собственно цели работы — определения радиусов орбит и периодов обращений с последующей проверкой III закона Кеплера.

Порядок выполнения работы

1. Создать папку для хранения материалов лабораторной работы.
2. Сохранить в ней описание работы и файлы со снимками.
3. Создать файл для работы в среде электронных таблиц.
4. Создать таблицы для определения проекции радиуса-вектора спутника на плоскость поля зрения для каждого снимка отдельно на трех листах таблицы.
5. Загрузить снимки, открывая поочередно файлы j1.jpg, j2.jpg и j3.jpg (которые находятся в архиве var1.rar или var2.rar) с помощью программы Paint.Net. Время, когда эти снимки получены, указано в поле снимка.
6. Получить проекции радиуса-вектора двух спутников на каждом снимке. Следует выбрать для измерений те спутники, которые имеют отчетливое смещение при переходе от одного снимка к другому.
7. Создать таблицы для решения системы уравнений (5) на четвертом и пятом листах для каждого спутника в отдельности и найти ее решение для обоих спутников.
8. Вычислить радиусы орбит спутников.

9. Проверить III закон Кеплера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. — М., 2001.
2. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. — М., 2002.
3. Климишин И. А. Астрономия наших дней. — М., 1986.
4. Слюта Е.Н., Иванов А.В., Иванов М.А. Сравнительная планетология: Основные понятия, термины и определения. — М., 1995.
5. Векуа Н. П. Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и приложения в механике. — М., 1991.
6. Рябов Ю. А. Движения небесных тел. — М., 1988.
7. Бердышев С. И. Астрономия. — М., 2001.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте законы, определяющие движения небесных тел.
2. Почему законы Кеплера справедливы и для спутников планет?
3. Какие упрощающие приближения вводятся для определения радиуса орбиты и периода обращения спутника Юпитера?
4. Перечислите источники погрешностей в определении радиуса орбиты и периода обращения спутника Юпитера.
5. Почему для определения радиуса орбиты спутника планеты требуется три раза определить его положение?
6. Как можно по-другому определить радиус орбиты спутника, и почему это труднее сделать другим способом?
7. Приведите решение математической задачи определения радиуса орбиты по трем наблюдениям.